MATHS I (M & P')

DURÉE : 4 heures

On note $\mathbb{R}$ le corps des réels, $\mathbb{C}$ le corps des complexes, $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit n un entier positif ou nul. On note $\mathbb{C}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ nuls ou de degré inférieur ou égal à n.

On note D_n l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}$ de module 1 dont une détermination θ de l'argument vérifie $|\theta| < \frac{\pi}{n+1}$.

Si z est un élément de $\mathbb{C}$, on désigne son conjugué par $\bar{z}$ et son module par $|z|$. Pour tout élément P de $\mathbb{C}[X]$ on pose $\| P \| = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

N.B. — Les parties I et II sont indépendantes.

I

Soit Q un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$.

1° Montrer que l'application $P \longmapsto \| PQ \|$ de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{R}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$.

2° Montrer qu'il existe un unique nombre réel $b_n(Q) > 0$ tel que l'on ait les deux conditions :

a. Pour tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$

$$\| PQ \| \geqslant b_n(Q) \| P \|,$$

b. Il existe au moins un polynôme P non nul de $\mathbb{C}_n[X]$ tel que :

$$\| PQ \| = b_n(Q) \| P \|.$$

3° Démontrer que $b_n(X-1) \leqslant \frac{2}{n+1}$.

II

1° Soit α un nombre réel positif. Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1 :

$$|z - \alpha| \geqslant \frac{1+\alpha}{2} |z - 1|.$$

2° Montrer que pour tout élément z de D_n et tout α de $\mathbb{C}$ de module 1 n'appartenant pas à D_n

i. $|(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})| \leqslant |1-\alpha|^2$

ii. $|z-\alpha| + |z-\bar{\alpha}| \leqslant 2|1-\alpha|$.

3° Montrer que pour tout nombre complexe z de module 1 n'appartenant pas à D_n

$$|z - 1| \geqslant \frac{2}{n+1}.$$

III

On désigne par $(\alpha_k)_{1 \leqslant k \leqslant n+1}$ les $n+1$ racines de $X^{n+1} + 1$ dans $\mathbb{C}$.

Soit $\varphi_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant l \leqslant n+1 \\ l \neq k}} (X - \alpha_l)$ pour $1 \leqslant k \leqslant n+1$.

1° Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$ on a :

$$P(X) = -\frac{1}{n+1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \alpha_k P(\alpha_k) \varphi_k(X).$$

En déduire la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ de la fraction rationnelle :

$$\frac{P(X)}{1 + X^{n+1}}.$$

Tournez la page S. V. P.

ENS ST-CLOUD FONTENAY 84 -1 15-

2° Démontrer l'identité :

$$\frac{X^{n+1}-1}{(X^2-1)(X^{n+1}+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1}' \frac{1}{(X-\alpha_k)(X-\bar{\alpha}_k)}$$

3° Pour z dans $\mathbb{C}$ soit :

$$S(z) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \frac{|1+z^{n+1}|}{|1-\alpha_k|\,|z-\alpha_k|}.$$

Montrer que pour tout élément z de D_n on a :

$$S(z) \leqslant S(1).$$

Calculer S(1).

IV

1° Montrer que :

$$b_n(X-1) = \frac{2}{n+1}.$$

2° Montrer que pour tout nombre complexe β :

$$b_n(X-\beta) \geqslant \frac{1+|\beta|}{n+1}.$$

3° Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ et soit P' le polynôme dérivé de P. Montrer que :

$$\|P'\| \leqslant n\|P\|.$$

4° Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs p et q.

Montrer que :

$$\max(p!, q!)\,\|P\| \cdot \|Q\| \leqslant (p+q)!\,\|PQ\|.$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail